

# Complemento de formas de Jordan

## por Martin Zimmermann

Supongamos que tenemos una matriz  $A$  de  $n \times n$  a la cual la queremos llevar a su forma más simple. El primer paso es obtener su polinomio característico  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ , y de allí obtener las  $k$  raíces distintas del mismo  $\{\lambda_i, i = 1..k\}$  que llamamos autovalores. Podemos escribir entonces en forma general  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$  donde los  $m_j$  corresponden a las multiplicidades de los autovalores.

Para obtener los autovectores asociados al autovalor  $\lambda_i$  resolvemos el sistema

$$(A - \lambda_i I).v = 0 \quad (1)$$

para  $v$  no-trivial (distinta de cero). Esto es lo mismo que calcular el espacio nulo  $N$  o kernel de  $(A - \lambda_i I)$ . Ahora bien, si el autovalor tiene multiplicidad  $m_i$  en general se tiene que la dimensión del espacio nulo es menor o igual a  $m_i$ . Cuando es igual, obtendremos  $m_i$  autovectores  $\{v_j, j = 1..m_i\}$  asociados a  $\lambda_i$ . Decimos que podemos *diagonalizar* una matriz  $A$  cuando obtenemos  $n$  autovectores de esta forma y estos forman una base del espacio vectorial. Si formamos una matriz  $J$  con todos los autovectores, tenemos que  $J^{-1}(A - \bar{\lambda} I)J = 0$ , donde  $\bar{\lambda}$  es un vector que contiene todos los autovalores de  $A$ .

Sin embargo puede ocurrir que la dimensión del espacio nulo  $\dim N(A - \lambda_i I)$  sea menor que la multiplicidad  $m_i$ . En este caso sabemos que al menos hay *un* autovector ( $\dim N(A - \lambda_i I) \geq 1$ ), porque de hecho determinamos  $\lambda_i$  como raíz del determinante de  $A - \lambda_i I$  es singular y por lo tanto hay al menos un autovector que satisface  $(A - \lambda_i I).v = 0$ . En este caso, para formar una base al subespacio asociado al autovalor  $\lambda_i$  recurriremos a los *autovectores generalizados* definidos por:

$$(A - \lambda_i I).w_1 = 0 \quad (A - \lambda_i I).w_j = w_{j-1}, \quad j = 2, \dots, m_i \quad (2)$$

de donde obtenemos recursivamente una secuencia de vectores  $\{w_j\}$ . Podemos verificar que si formamos una matriz  $J$  con  $\{w_j\}$  siendo columnas, obtenemos que  $J^{-1}(A - \lambda_i I)J = N$ , con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Esta matriz se la conoce como *nilpotente* ya que  $N^{m_i} = 0$  y podemos verificar este resultado fácilmente haciendo  $(A - \lambda_i I)J - JN = 0$ . Es decir que los autovectores generalizados nos transformó  $(A - \lambda_i I)$  a la matriz semejante  $N$ , o en otras palabras  $J^{-1}AJ = J^{-1}(\lambda_i I)J + N$  por lo que  $A$  es semejante con

$$A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (4)$$

que se llama *la forma de Jordan*.

Una aclaración. Puede ocurrir que cuando calculamos  $w_j$  por los autovectores generalizados ocurra que  $w_j = 0, j = 2, \dots, m_i - 1$ . En este caso el bloque de Jordan resultante

se formará tendrá dimensión igual a la cantidad de vectores  $w_j \neq 0$  más 1. Arriba supusimos que el bloque de Jordan tiene dimensión exactamente la multiplicidad  $m_i$  del autovalor.

**Ejemplo** Calculemos la forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Tenemos  $P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$ . Vemos que  $(A + 1).w_1 = 0$  tiene un nucleo de dimensión 1 y  $w_1 = (0, 0, 1)$ . Ahora  $(A - 2)$  tiene un nucleo de dimensión 1 y la multiplicidad del autovalor es 2. Asi que resolvemos primero  $(A - 2).w_2 = 0$ , con  $w_2 = (0, 3, 5)$ . Luego  $(A - 2).w_3 = w_2$  y sacamos el subespacio nulo  $(1, (1 + 3r)/5, r)$  y elegimos  $w_3 = (1, 4/5, 1)$ . Asi formamos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4/5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

y hacemos la transformacion de semejanza

$$J^{-1}AJ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

llegando asi a su forma de Jordan.

**Aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias.** Dado un sistema dinámico no-lineal, nos interesa resolver típicamente la parte lineal del sistema. Puede ocurrir que si la matriz original es semejante a una matriz en forma de Jordan, como es la resolución del sistema lineal?

Tomemos el sistema,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

que es un bloque de Jordan de orden 3. Si proponemos como solución para  $x(t) = (c_0 + c_1t + c_2t^2)e^{\lambda t}$ , tendremos que  $\dot{x} = \lambda x + (c_1 + 2c_2t)e^{\lambda t}$ , con lo que  $y(t) \equiv (c_1 + 2c_2t)e^{\lambda t}$ , y para terminar tendríamos  $\dot{y} = \lambda y + 2c_2e^{\lambda t}$ , con lo que  $z(t) \equiv 2c_2e^{\lambda t}$ . La condición inicial será  $(x, y, z)(0) = (c_0, c_1, 2c_2)$ .

En otras palabras la solución general quedará como combinación lineal de monomios  $t^j e^{\lambda t}$ ,  $j = 0, \dots, n$ .