Dinámica Nolineal

Guia N° 4b - Bifurcaci'on de Hopf
1er cuatrimestre 2004

P 1: **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.
(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.
(b) Pruebe que al menos tiene una órbita periódica, y si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a, b)$.
(c) Pruebe que para $b = 0$ hay solo una órbita periódica.

P 2: Estudie el sistema $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos\theta$, $\quad \dot{\theta} = 1$.
(a) Por medio de simulaciones numéricas, vea si existe un un parámetro $\mu > 0$ crítico donde la órbita periódica desaparece.
(b) Usando el teorema de Poincaré-Bendixon muestre que hay una órbita periódica en el ánulo $\sqrt{1-\mu} < r < \sqrt{1+\mu}$ para todo $\mu < 1$.
(c) Para aproximar la forma de $R(\theta)$ de la órbita para $\mu \ll 1$, asuma una serie de potencias de la forma $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$. Sustituya esta solución en la ecuación diferencial $dr/d\theta$ y aproxime tirando los términos de orden $O(\mu^2)$. Obtenga entonces una ecuación diferencial para $r_1(\theta)$, y resuélvala. Esta aproximación se conoce como *perturbación regular*.
(d) Muestre que la solución está dentro del ánulo encontrado previamente.
(e) Compare mediante simulaciones numéricas la solución analítica encontrada y exacta. Como depende el error de μ?

P 3: Considere el oscilador de van der Pol $\ddot{x} + \mu(x^2 - 4)\dot{x} + x = a$. Encuentre las curvas (μ, a) donde ocurre la bifurcación de Hopf.

P 4: Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen bifurca Hopf en $\mu = 0$ y mediante simulaciones numéricas verifique si la bifurcación es sub- o supercrítica.
(a) $\dot{x} = y + \mu x$, $\quad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$
(b) $\dot{x} = \mu x + y - x^3$, $\quad \dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$
(c) $\dot{x} = \mu x + y - x^2$, $\quad \dot{y} = -x + \mu y + 2x^2$

P 5: Considere el sistema predador-presa,

$$\dot{x} = x\left(b - x - \frac{y}{1+x}\right), \quad \dot{y} = y\left(\frac{x}{1+x} - ay\right) \tag{1}$$

donde $x, y \geq 0$ son las poblaciones y $a, b > 0$ son parámetros.
(a) Dibuje las nulclinas y discuta las bifurcaciones que ocurren si b cambia.
(b) Muestre que hay un punto fijo $x^*, y^* > 0$, para todo $a, b > 0$. Use un método gráfico para esto.
(c) Muestre que ocurre una bifurcación de Hopf en (x^*, y^*) si $a = a_c = \frac{4(b-2)}{b^2(b+2)}$, donde $b > 2$.
(d) Mediante simulaciones numéricas compruebe el resultado anterior y muestre que la bifurcación es sub- o supercrítica.

<u>P 6:</u> Considere un modelo de respiración de un cultivo de bacterias,

$$\dot{x} = B - x - \frac{xy}{1 + qx^2}, \qquad \dot{y} = A - \frac{xy}{1 + qx^2} \tag{2}$$

donde x e y son lo niveles de nutrientes y oxígeno, y $A, B, q > 0$ son parámetros. Investigue la dinámica de este modelo. Encuentre todos los puntos fijos y clasifíquelos. Estudie las nulclinas y trate de construir una *región atrapante* del sistema. Puede encontrar condiciones sobre los parámetros donde existe una órbita periódica estable? Use simulaciones numéricas o resultados de la bifurcación de Hopf, o lo que resulte útil. El problema es abierto asi que discútalo.