Dinámica Nolineal

Guia N° 4 - Flujos bidimensionales y espacio de fases
1er cuatrimestre 2004

P 1: Considere el sistema $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.
(a) Realice un diagrama del campo vector.
(b) Muestre que las trajectorias del sistema son hipérbolas de la forma $x^2 - y^2 = C$. Hint: Muestre que $x\dot{x} - y\dot{y} = 0$ e integre esta ecuación.
(c) El origen es un saddle. Encuentre ecuaciones para sus variedades estables e inestables.
(d) El sistema se puede desacoplar de la siguiente manera. Realice un cambio de variables $u = x + y, v = x - y$, y reescriba el sistema en términos de u, v. Resuelva para $u(t)$ y $v(t)$ dada una condición inicial (u_0, v_0).
(e) Como son las ecuaciones para la variedad estable e inestable en términos de u y v?
(f) Finalmente encuentre la solución general para $x(t)$ y $y(t)$, dada una condición inicial (x_0, y_0).

P 2: **Clasificación de sistemas lineales** Considere el sistema $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 2x + y$.
(a) Escriba el sistema en forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Muestre que el polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ y encuentre los autovalores.
(b) Encuentre la solución general del sistema.
(c) Clasifique el punto fijo en el origen.
(d) Resuelva el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

P 3: Considere el sistema $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$.
(a) Encuentre la matriz A y muestre que tiene autovalores $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, con autovectores $\mathbf{v_1} = (i, 1)$, $\mathbf{v_2} = (-i, 1)$.
(b) La solución general es $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$. Reescriba esta expresión usando funciones valuada en los reales (senos y cosenos).

P 4: Dibuje el retrato de fase y clasifique los puntos fijos de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales muestrelos en el gráfico.
(a) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x - 3y$
(b) $\dot{x} = 5x + 10y, \quad \dot{y} = -x - y$
(c) $\dot{x} = 3x - 4y, \quad \dot{y} = x - y$
(d) $\dot{x} = -3x + 2y, \quad \dot{y} = x - 2y$
(e) $\dot{x} = 5x + 2y, \quad \dot{y} = -17x - 5y$
(f) $\dot{x} = -3x + 4y, \quad \dot{y} = -2x + 3y$

P 5: Muestre que la matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$ tiene solo un autoespacio unidimensional correspondiente al autovalor λ. Resuelva el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y dibuje el retrato de fases.

P 6: Considere la ecuación de un circuito RLC, $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$, donde $LC > 0$ y $R \geq 0$.
(a) Reescriba el sistema como de dos dimensiones.

(b) Muestre que el origen es asintoticamente estable si $R > 0$ y neutralmente estable si $R = 0$.
(c) Clasifique el punto fijo en el origen dependiendo si $R^2C - 4L$ es positivo, negativo o cero. Dibuje un retrato de fases para los tres casos.

P 7: **Retratos de fases**
Para los siguientes sistemas encuentre los puntos fijos. Dibuje las nulclinas, el campo vector y un posible retrato de fases.
(a) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = 1 - e^x$
(b) $\dot{x} = x - x^3, \qquad \dot{y} = -y$
(c) $\dot{x} = x(x - y), \qquad \dot{y} = y(2x - y)$
(d) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = x(1 + y) - 1$
(e) $\dot{x} = x(2 - x - y), \qquad \dot{y} = x - y$

P 8: **Retratos de fase utilizando computadoras**
Por medio de integración númerica obtenga retratos de fase para los siguientes sistemas:
(a) (oscilador van del Pol) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + y(1 - x^2)$
(b) (punto fijo en un dipolo) $\dot{x} = 2xy, \qquad \dot{y} = y^2 - x^2$.
(c) (mounstro de dos cabezas) $\dot{x} = y + y^2, \qquad \dot{y} = -x/2 + y/5 - xy + 6y^2/5$

P 9: **Aproximación en series de la variedad estable**
El sistema $\dot{x} = x + e^{-y}, \dot{y} = -y$ tiene un punto fijo y un saddle en (-1,0). La variedad inestable es el eje x, pero su variedad estable es una curva que es más dificil de encontrar.
(a) Sea (x, y) un punto en la variedad estable y asuma que (x, y) está cerca de $(-1, 0)$. Introduzca una nueva variable $u = x + 1$ y reescriba la variedad estable como $y = a_1u + a_2u^2 + O(u^3)$. Para determinar los coeficientes, derive las dos expresiones para dy/dx e igualelas término a término.
(b) Compruebe utilizando una computadora que su resultado analítico produce una curva con la misma forma que la variedad numérica.

P 10: **Puntos fijos y linearización**
Para cada uno de los sistemas, encuentre los puntos fijos, clasifiquelos, y dibuje un retrato de fases en un entorno de los mismos. Trate de llenar el espacio en blanco entre los puntos fijos.
(a) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = x^2 - 4$
(b) $\dot{x} = \sin y, \qquad \dot{y} = x - x^3$
(c) $\dot{x} = 1 + y - e^{-x}, \qquad \dot{y} = x^3 - y$
(d) $\dot{x} = \sin y, \qquad \dot{y} = \cos x$
(e) $\dot{x} = xy - 1, \qquad \dot{y} = x - y^3$

Para cada uno de los sistemas de arriba realice un retrato de fases usando integración numérica.

P 11: Considere el sistema $\dot{x} = y^3 - 4x, \dot{y} = y^3 - y - 3x$.
(a) Encuentre todos los puntos fijos.
(b) Muestre que la linea $x = y$ es invariante (toda trajectoria que comienza en la linea se queda alli.)
(c) Muestre que $|x(t) - y(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$ para todas las trajectorias. Hint: escriba

una ecuación diferencial para $x - y$.

(d) Dibuje un retrato de fases.

(e) Con la computadora realice un retrato de fases preciso en el dominio $-20 \leq x, y \leq 20$. Utilice un paso de integración suficientemente pequeño para no tener inestabilidades numéricas. Fijense que las trajectorias parecen acercarse a una curva en $t \to -\infty$. Puede explicar esto intuitivamente y tal vez encontrar una curva aproximada?

P 12: **Sensibilidad a términos nolineales** Mostremos un ejemplo donde los términos nolineales pueden cambiar el retrato de fases localmente. Considere el sistema en coordenadas polares $\dot{r} = -r, \dot{\theta} = 1/\ln r$.

(a) Encuentre $r(t)$ y $\theta(t)$ explícitamente.

(b) Muestre que $r(t) \to 0$ y $|\theta(t)| \to \infty$ a medida que $t \to \infty$, entonces el origen es un foco atractor del sistema nolineal.

(c) Reescriba el sistema en coordenadas (x, y).

(d) Muestre que el sistema linearizado en el origen es estable pero no foco.

P 13: **Estabilidad estructural y conexión saddle** Considere el sistema $\dot{x} = a + x^2 - xy, \dot{y} = y^2 - x^2 - 1$, donde a es un parámetro.

(a) Muestre el retrato de fases para $a = 0$. Muestre que hay una trajectoria que conecta los dos saddles. Esta órbita se denomina *conexión saddle*.

(b) Mediante una computadora si es necesario, vea que para $a \neq 0$ la conexión saddle se rompe. El punto del ejercicio es mostrar que una pequeña perturbación puede modificar la topología del retrato de fases, por lo que se denomina *sistema estructuralmente inestable*.

P 14: Considere el siguiente problema de dinámica de poblaciones, donde ambas tienen una capacidad de carga finita,

$$\dot{N}_1 = r_1 N_1 (1 - N_1/K_1) - b_1 N_1 N_2 \tag{1}$$
$$\dot{N}_2 = r_2 N_2 (1 - N_2/K_2) - b_2 N_1 N_2 \tag{2}$$

(a) Adimensionalice el modelo. Cuantos grupos adimensionales son necesarios?

(b) Muestre que hay 4 retratos de fases cuantitativamente distintos, en términos del comportamiento asintótico del sistema.

(c) Encuentre las condiciones por las cuales las dos poblaciones pueden coexistir establemente. Explique el significado biológico de la condición. Hint: la capacidad de carga refleja la competencia dentro de la misma especie, donde b refleja la competencia entre especies.

P 15: **Modelo epidemiológico revisado** La idea es ver que es más sencillo analizar este problema en el espacio de fases. El modelo es:

$$\dot{x} = -kxy, \qquad \dot{y} = kxy - ly \tag{3}$$

donde $k, l > 0$.

(a) Encuentre y clasifique todos los puntos fijos.

(b) Haga un dibujo de las nulclinas y del campo vector.

(c) Encuentre una cantidad que se conserve en el sistema.
(d) Haga un retrato de fases. Que pasa en $t \to \infty$?
(e) Sea (x_0, y_0) una condición inicial. Una epidemia ocurre cuando $y(t)$ aumenta inicialmente. Bajo que condiciones esto ocurre?

P 16: **Sistemas conservativos** Considere el sistema $\dot{x} = xy, \dot{y} = -x^2$.
(a) Muestre que $E = x^2 + y^2$ se conserva.
(b) Muestre que el punto fijo en el origen no esta aislado.
(c) Como E tiene un minimo local en el origen, uno tendería pensar que el origen es un centro. Muestre que el origen no esta rodeado de órbitas cerradas y haga un dibujo del retrato de fases.